Aula 05: Matrizes Quadradas e Sistemas Lineares

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Equações Matriciais

Dado o sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &= -3 \\ -x_1 - 5x_2 &= 3 \end{aligned}$$

podemos rescrevê-lo como uma equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matrizes Quadradas

- A matriz $A = \left[\begin{array}{rr} 3 & 3 \\ -1 & -5 \end{array} \right]$ é uma matriz de ordem 2×2.
- Quando o número de linhas **é igual** ao número de colunas, dizemos que a **matriz é quadrada**.
- Logo, a matriz A é um exemplo de matriz quadrada.

Matrizes Quadradas

- Em uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, chamamos de **diagonal principal** o conjunto dos elementos

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}.$$

- Esses elementos são aqueles cujos índices de linha e coluna são iguais ($i = j$).
- Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{2} & 5 & 1 \\ 4 & \color{red}{3} & 7 \\ 6 & 8 & \color{red}{9} \end{bmatrix}$$

Os elementos destacados formam a diagonal principal da matriz.

Matrizes Quadradas

- Uma matriz quadrada especial é a **matriz identidade**, denotada por I_n.
- Ela possui 1 na diagonal principal e 0 em todas as outras posições. Por exemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ela tem a propriedade especial que o número 1 exerce no produto de números reais:

$$AI_n = I_nA = A$$

para toda matriz quadrada A de ordem n.

Matriz Inversa

- Seja A uma matriz quadrada de ordem n.
- Dizemos que A é **inversível** se existe uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n.$$

- Nesse caso, B é chamada de **matriz inversa** de A e denotamos

$$B = A^{-1}.$$

- Se A não possui inversa, dizemos que A é uma **matriz singular**.

Calculando a Inversa pela Definição

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Queremos encontrar uma matriz B tal que

$$AB = I_2$$

Escrevemos B com incógnitas:

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Igualando à Identidade

Calculamos o produto

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 3z & 3y + 3w \\ -x - 5z & -y - 5w \end{bmatrix}$$

Igualando à matriz identidade

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtemos os sistemas

$$\begin{cases} 3x + 3z = 1 \\ -x - 5z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y + 3w = 0 \\ -y - 5w = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas:

$$x = \frac{5}{12}, \qquad y = \frac{1}{4}$$

$$z = -\frac{1}{12}, \qquad w = -\frac{1}{4}$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Ideia

Se A possui inversa, então

$$Ax = b$$

multiplicando por A^{-1}

$$x = A^{-1}b$$

Ou seja, resolver um sistema linear equivale a calcular um produto de matrizes.

Como A possui inversa, dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} \\ \\ -\dfrac{1}{12} & -\dfrac{1}{4} \end{bmatrix},$$

podemos reescrever o sistema dado como:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} &\Rightarrow A^{-1}(A\mathrm{x}) = (A^{-1}A)\mathrm{x} = A^{-1}\mathbf{b} \\ &\Rightarrow I_2\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \\ &\Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a solução (x_1, x_2) fazendo o produto $A^{-1}\mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} \\ \\ -\dfrac{1}{12} & -\dfrac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Dificuldade do Método

Para calcular a inversa pela definição:

- precisamos determinar n^2 incógnitas
- resolvendo n sistemas lineares
- cada um com n equações

Para matrizes grandes, esse método não é prático.

Falaremos sobre determinantes e escalonamento, onde veremos métodos mais eficientes.

Resumo

- Sistemas lineares podem ser escritos como $Ax = b$
- Se A possui inversa
$$x = A^{-1}b$$
- Logo, nesse caso, resolver sistemas lineares está ligado ao cálculo da matriz inversa.